UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL
"FRANCISCO DE MIRANDA"
PROGRAMA INGENERIA MECANICA
AREA DE TECNOLOGIA
DPTO. DE MEC. Y TECN. DE LA PRODUCCION
COMPLEJO ACADEMICO "PUNTO FIJO"

TEMA N°3

Tema III: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN MECANISMOS

Objetivo Terminal:

Al finalizar la unidad, el alumno estará en la capacidad de conocer los diferentes métodos de cálculo de velocidad y aceleración de elementos de un mecanismo.

PROF. DAVID GUANIPA

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL
“FRANCISCO DE MIRANDA”
PROGRAMA INGENERIA MECANICA
AREA DE TECNOLOGIA
DPTO. DE MEC. Y TECN. DE LA PRODUCCION
COMPLEJO ACADEMICO “PUNTO FIJO”

TEMA III
Velocidad y aceleración en mecanismos

- Definición y aplicaciones de Desplazamiento, velocidad y aceleración de los mecanismos
- Velocidad Lineal.
- Aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración de coriolis.
- Métodos de análisis de velocidad y aceleración.
- Teorema de Kennedy
- Problemas

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

La velocidad se define como *la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo.*

La posición (R) es una cantidad vectorial. La velocidad puede ser angular (ω) o lineal (V).

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \qquad V = \frac{dR}{dt}$$

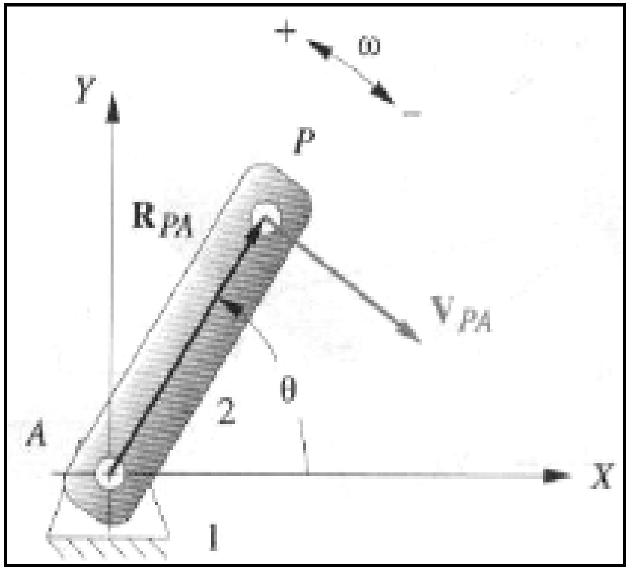
Derivando con respecto al tiempo nos quedan las ecuaciones
que se utilizaran para obtener el polígono de velocidades

$$\boxed{V^t = \omega \times \bar{r}} \qquad \boxed{V_P = V_A + V_{P/A}}$$

Esta ecuación viene de la ecuación
de desplazamiento relativo.

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

La figura muestra un eslabón PA en rotación pura, pivotado en el punto *A* en el plano *x y*. Su posición se define mediante el vector de posición R_{PA}.



$$V^t = \omega \times \overline{r}$$

La V_{PA} en la figura se denomina *velocidad absoluta*, ya que se refiere a *A*, que es donde se encuentra el centro de giro de la barra. Como tal, se podría hacer referencia a ella Como V_P, que determina su magnitud con la ecuación.

Analizando la figura se aprecia que la velocidad se encuentra siempre en dirección (definida por la ω) perpendicular al radio de rotación y es tangente a la trayectoria del movimiento.

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

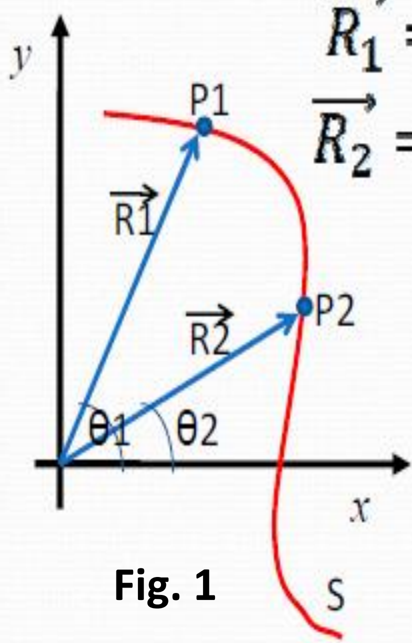


Fig. 1

$$\overrightarrow{R_1} = r_1 \cdot \hat{U}_r(\theta_1)$$

$$\overrightarrow{R_2} = r_2 \cdot \hat{U}_r(\theta_2)$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}}$$

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

- **Componentes de la Velocidad.**

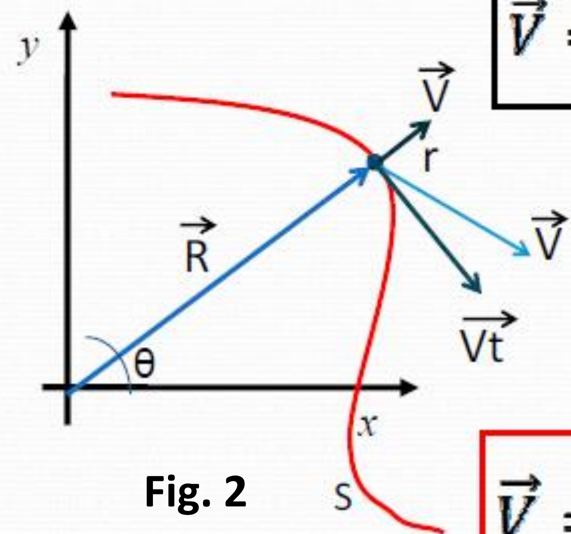


Fig. 2

$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$	$\vec{R} = r \cdot \hat{U}_r$	$\vec{V} = \frac{d(r \cdot \hat{U}_r)}{dt}$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{U}_r + r \cdot \frac{d\hat{U}_r}{dt}}$$

$$\frac{d\hat{U}_r}{dt} = \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\omega} \cdot \hat{U}_\theta$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{U}_r + r \cdot \omega \cdot \hat{U}_\theta}$$

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

- **Componentes de la Velocidad.**

0

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{U}_r + r \cdot \omega \cdot \hat{U}_\theta}$$

Componente radial

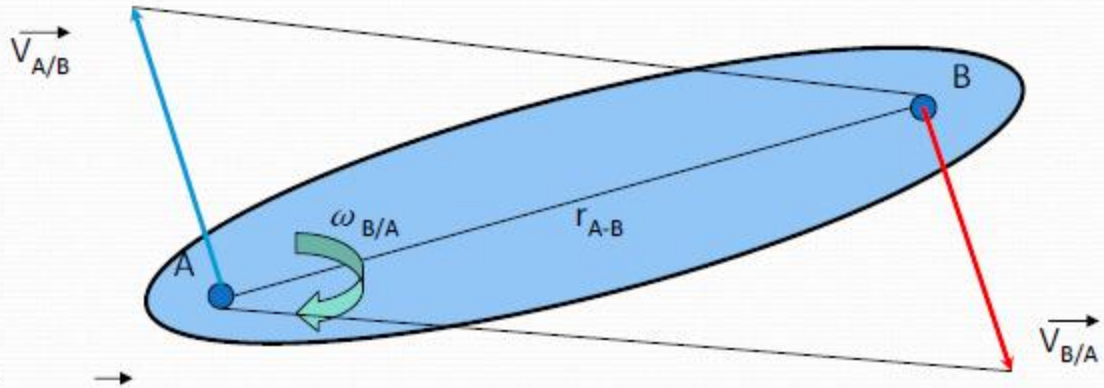
Componente transversal

$$\boxed{\boxed{\vec{V} = r\omega\hat{U}_\theta}}$$

$$\boxed{\boxed{\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_{A/B}}}}$$

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

- **Velocidad relativa.**



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \qquad \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

$$\vec{V}_{B/A} = \omega_{B/A} \times r_{B/A} \quad [\perp BA] \qquad \vec{V}_{A/B} = \omega_{A/B} \times r_{A/B}$$

Fig. 3

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

Análisis gráfico de velocidad

El análisis gráfico de velocidad determina la velocidad de puntos de un mecanismo en una sola configuración. Se debe hacer énfasis en que los resultados de este análisis corresponden a la posición actual del mecanismo. Conforme el mecanismo se mueve, la configuración cambia al igual que las velocidades.

El fundamento del método de análisis de velocidad relativa se deriva del hecho siguiente: "Dos puntos que residen en el mismo eslabón tan solo pueden tener una velocidad relativa que esté en dirección perpendicular a la línea que une los dos puntos". Myszka 4ta Ed. (2012).

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

El análisis más simple con el método de velocidad relativa implica puntos que residen en eslabones restringidos a rotación pura o a traslación rectilínea La razón es que se conoce la dirección del movimiento de los puntos.

Para resolver de manera gráfica cualquier análisis de velocidad, son necesarias sólo dos ecuaciones: ***(Nortón 2009).***

$$\overrightarrow{VB} = \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB/_A}$$

$$|V| = v = rw$$

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

En la figura se muestra un sistema diferente y ligeramente más complicado, en el cual el pivote *A* ya no es estacionario. Tiene una velocidad lineal conocida (V_A), y como parte del elemento de traslación, el eslabón 3.

si ω no cambia, la velocidad del punto P con respectoa a A permanece igual que en el ejemplo anterior, pero V_{PA} ya no se considera una velocidad absoluta (V_P). Ahora es una *diferencia de velocidad* y debe llevar el subíndice como V_{PA}.

Para calcularla se utiliza la ecuación:

$$\boxed{V_P = V_A + V_{P/A}}$$

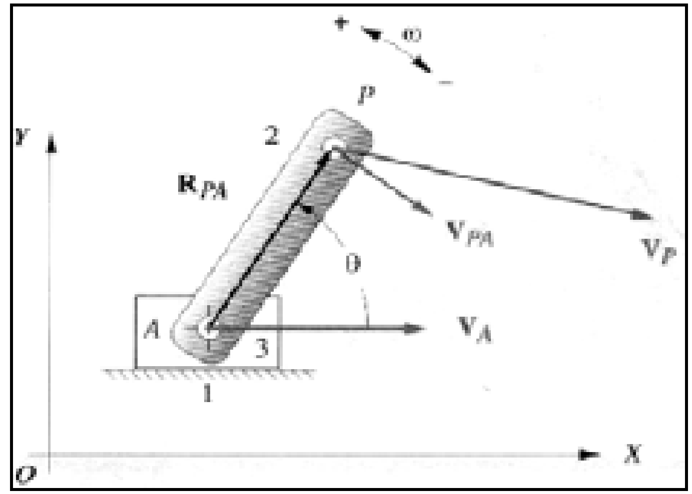
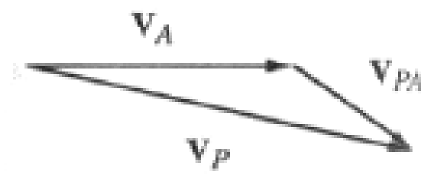


Fig. 4



Solución grafica
(polígono de velocidad)

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

Método analítico de Análisis de velocidad (4 Barras)

En la figura 5 se ilustra un mecanismo general de cuatro barras, definido únicamente por las dimensiones L1, L2, L3, L4. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo $\emptyset_2$, W2, y la posición de todos los eslabones, se determinan las velocidades de los otros eslabones.

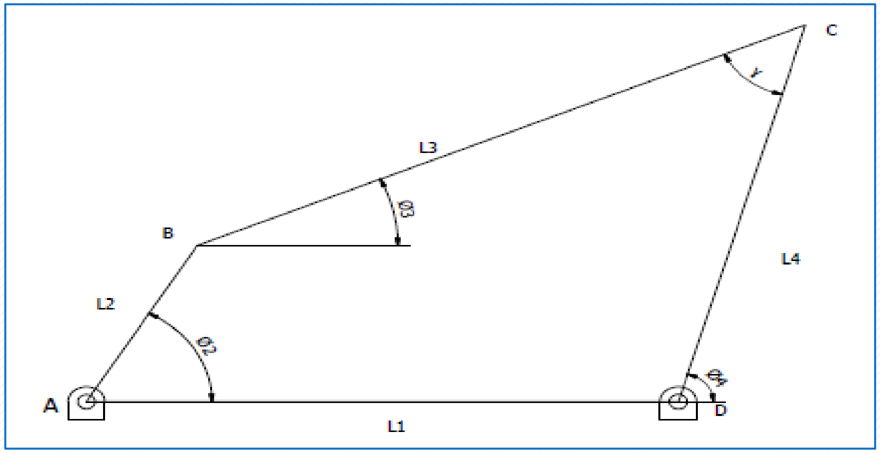


Fig. 5

$$W_3 = -W_2 \left[\frac{L_2 \sin(\emptyset_4 - \emptyset_2)}{L_3 \sin \gamma} \right]$$

$$W_4 = -W_2 \left[\frac{L_2 \sin(\emptyset_3 - \emptyset_2)}{L_4 \sin \gamma} \right]$$

Se tienen que aplicar las ecuaciones para determinar la velocidad angular de los eslabones 3 y 4 en una configuración cualquiera de un mecanismo.

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

Método analítico de Análisis de velocidad (BMC)

En la figura 6 se presenta un mecanismo general de biela manivela corredera que está definido únicamente por las dimensiones L1, L2 y L3. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo $\emptyset_2$,W_2 y la posición de todos los eslabones, se determinan las velocidades de los otros eslabones con las ecuaciones:

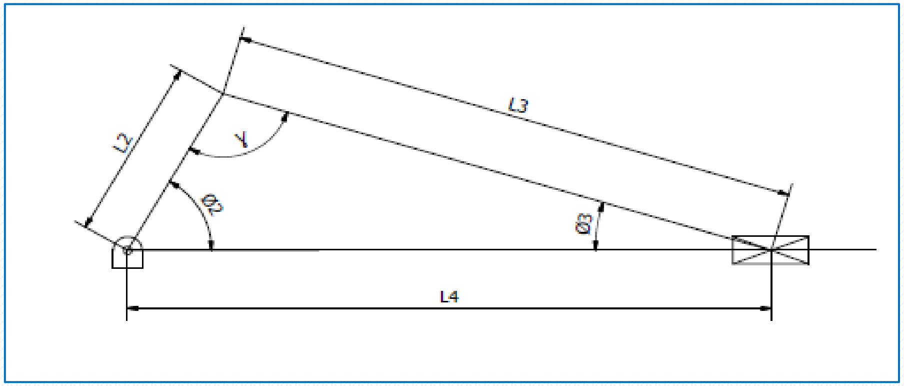


Fig. 6

$$w_3 = -w_2\left(\frac{L_2 \cos \emptyset_2}{L_3 \cos \emptyset_3}\right)$$

$$V_4 = -W_2 L_2 \sin \emptyset_2 + W_3 L_3 \sin \emptyset_3$$

Se tienen que aplicar estas ecuaciones para determinar la velocidad angular eslabón 3 y la velocidad lineal del eslabón 4 en una configuración cualquiera de este mecanismo.

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}.\hat{U}_r}_{\text{Componente radial}} + \underbrace{r.\omega.\hat{U}_\theta}_{\text{Componente transversal}}$$

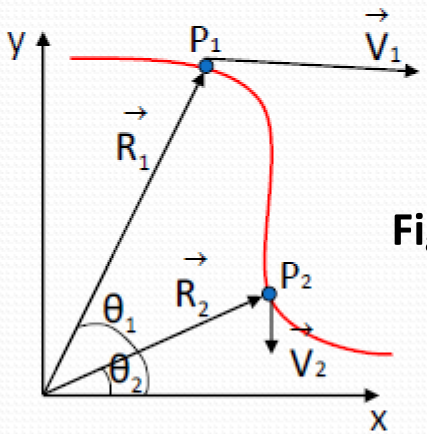


Fig. 7

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

$$\vec{A} = \underbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r.\omega^2\right)\hat{U}_r}_{\text{Componente radial}} + \underbrace{\left(r\alpha + 2\omega\frac{dr}{dt}\hat{U}_\theta\right)\hat{U}_\theta}_{\text{Componente transversal}}$$

$$\vec{A} = \left(\cancelto{0}{\frac{d^2r}{dt^2}} - \underbrace{r.\omega^2}_{\text{A. Centrípeta}}\right)\hat{U}_r + \left(\underbrace{r\alpha}_{\text{A. Centrífuga}} + \underbrace{2\omega\frac{dr}{dt}}_{\text{A. Coriolis}}\hat{U}_\theta\right)\hat{U}_\theta$$

A. Radial **A. Tangencial**

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Aceleración de Coriolis

Esta aceleración se produce cuando un punto está girando y simultáneamente cambiando su radio de rotación respecto a un punto de referencia.

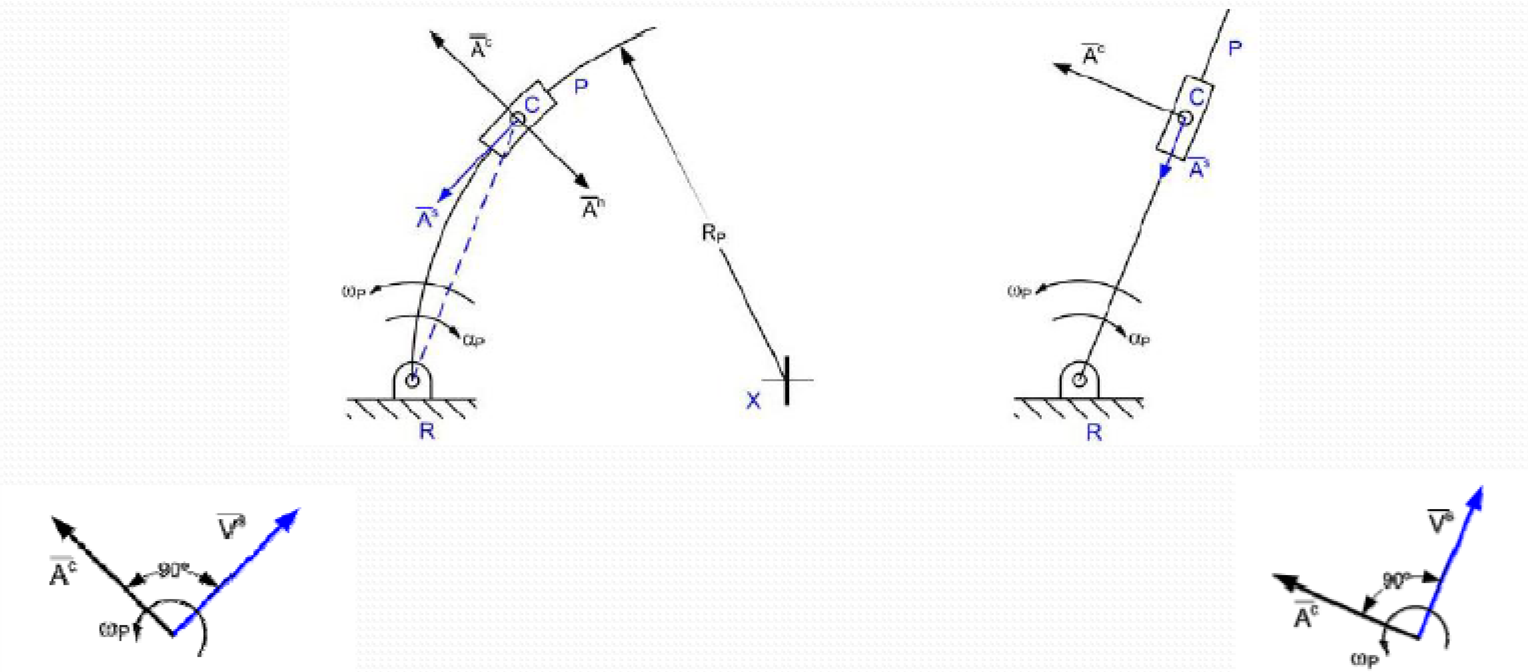


Fig. 8

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Análisis gráfico de aceleración

El método gráfico de las aceleraciones relativas, guarda una gran similitud con el de las velocidades relativas, pues en los dos se trata de realizar gráficamente una suma vectorial.

Es un método que permite determinar aceleraciones a partir de los datos de una barra conocida, teniendo en cuenta del paso de barra en barra.

Si se conoce la aceleración angular del eslabón 2, α, así como su dirección. Para calcular la aceleración de un punto B por medio del método de las aceleraciones relativas, se planteará la igualdad vectorial:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$$

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Análisis gráfico de aceleración

La aceleración del punto A puede ser de inmediato conocida a través de sus componentes normal y tangencial con las ecuaciones:

$$\left|\vec{A}_A^n\right| = W^2 * O_2A$$

$$\left|\vec{A}_A^t\right| = \propto * O_2A$$

Estos valores son el punto de partida del método gráfico de aceleraciones relativas y al graficar la aceleración normal de A con sentido de A a O_2 *se obtiene la aceleración absoluta de A con sentido igual al indicado por la aceleración angular* $\propto_2 = 0$. *Ver figura 9.*

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

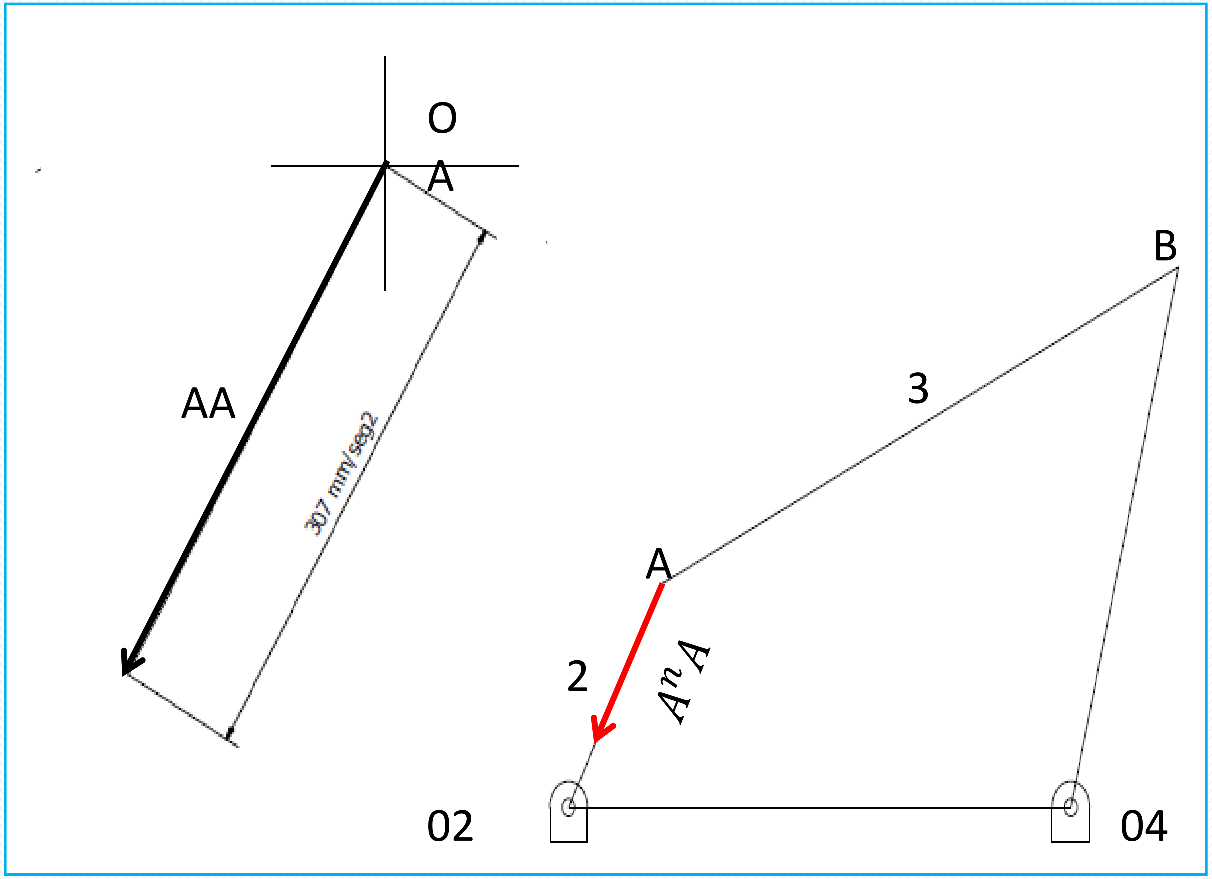


Fig. 9

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Por otra parte, como es sabido de la ecuación:

$$\vec{A}_{B/A} = \vec{A}_{B/A}^{\ n} + \vec{A}_{B/A}^{\ t}$$

De donde descomponiendo las aceleraciones del punto B y la relativa del punto B respecto del A, se obtiene de la ecuación:

$$\vec{A}_B^{\ n} + \vec{A}_B^{\ t} = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}^{\ n} + \vec{A}_{B/A}^{\ t}$$

Ambas aceleraciones normales pueden ser calculadas, ya que:

$$\left|\vec{A}_B^n\right| = {W_4}^2 * O_4B$$

$$\left|\vec{A}_{B/A}^n\right| = {W_3}^2 * AB$$

Siendo la dirección de la aceleración normal del punto B la de la recta O4B y su sentido de O4 a B, mientras que la dirección de la componente normal de la aceleración relativa es la de la recta AB y su sentido desde B hacia A. (ver figura 10)
Por otra parte las direcciones de las aceleraciones tangenciales incógnita son también conocidas: (Ver figura 10).

- La dirección de $\vec{A}_B^{\ t}$ es perpendicular a O4B.

- La dirección de $\vec{A}_{B/A}^{\ t}$ es perpendicular a AB.

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

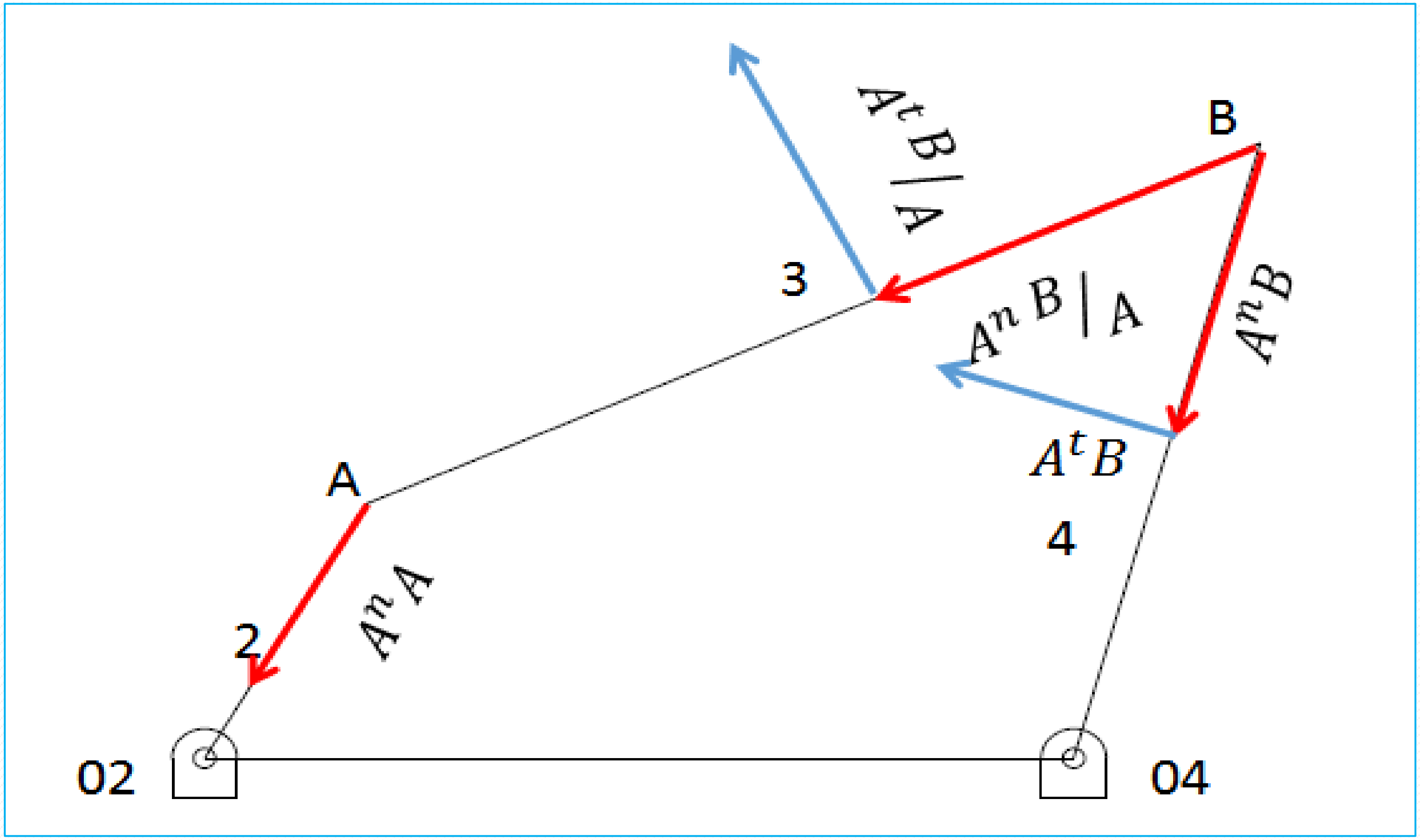


Fig. 10

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Por lo tanto, operando como a continuación se indica se obtendrá la aceleración del punto B: (Ver figura 11)

a) Se elige una escala de aceleraciones, el polo y se traza AA.

b) Por el extremo de AA se dibuja $\overrightarrow{A}^{n}_{B/A}$.

c) Por el extremo de $\overrightarrow{A}^{n}_{B/A}$ *se dibuja una perpendicular a la dirección BA.*

d) Con origen en el polo se dibuja el vector $\overrightarrow{A}^{n}_{B}$ *y por su extremo una perpendicular a la dirección O4B.*

e) Donde se cruzan las perpendiculares trazadas a AB y a O4B se obtiene el punto B y, por tanto, la aceleración del punto B.

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

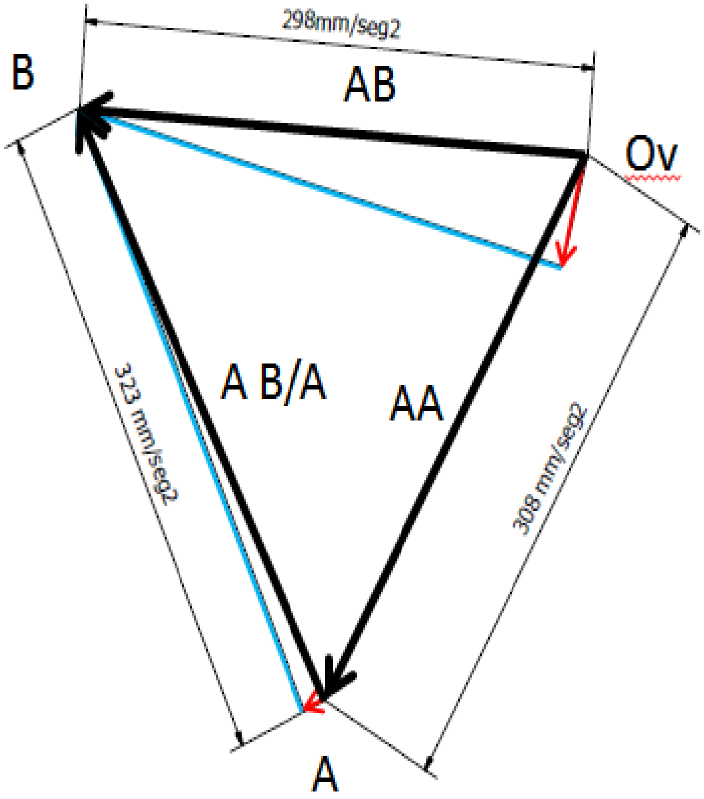
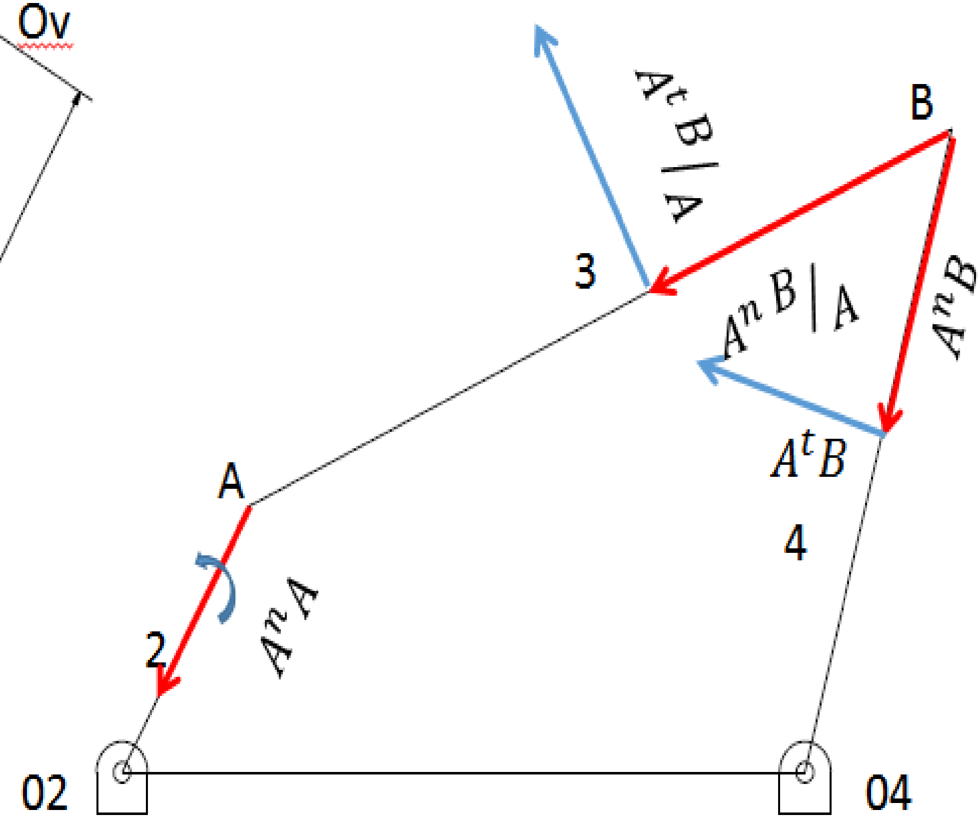


Fig. 11



DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Método analítico de Análisis de aceleración (4 Barras)

En la figura 12 se ilustra un mecanismo general de cuatro barras, definido únicamente por las dimensiones L1, L2, L3, L4. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones. Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo Ø2, W2, ∝_(2), y la posición de todos los eslabones, se determinan las velocidades y aceleraciones de los otros eslabones.

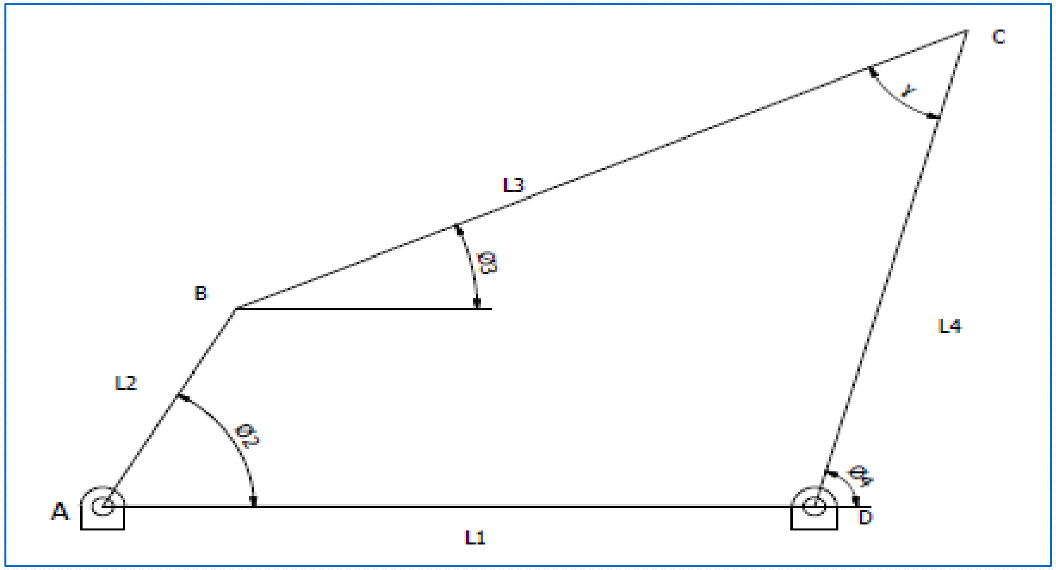


Fig. 12

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Método analítico de Análisis de aceleración (4 Barras)

Las ecuaciones a continuación muestran el cálculo que se realiza para calcular las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4.

$$\propto_3 = \frac{\propto_2 L_2 \sin(\emptyset_2 - \emptyset_4) + w_2^2 L_2 \cos(\emptyset_2 - \emptyset_4) - w_4^2 L_4 + w_3^2 L_3 \cos(\emptyset_4 - \emptyset_3)}{L_3 \sin(\emptyset_4 - \emptyset_3)}$$

$$\propto_4 = \frac{\propto_2 L_2 \sin(\emptyset_2 - \emptyset_3) + w_2^2 L_2 \cos(\emptyset_2 - \emptyset_3) + w_3^2 L_3 - w_3^2 L_4 \cos(\emptyset_4 - \emptyset_3)}{L_4 \sin(\emptyset_4 - \emptyset_3)}$$

Se tienen que aplicar las ecuaciones para determinar la aceleración angular de los eslabones 3 y 4 en una configuración cualquiera de un mecanismo.

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Método analítico de Análisis de aceleración (BMC)

En la **figura 13** se presenta un mecanismo general de biela manivela corredera que está definido únicamente por las dimensiones L1, L2 y L3. Con un grado de libertad, se especifica el movimiento de un solo eslabón para impulsar los otros eslabones.

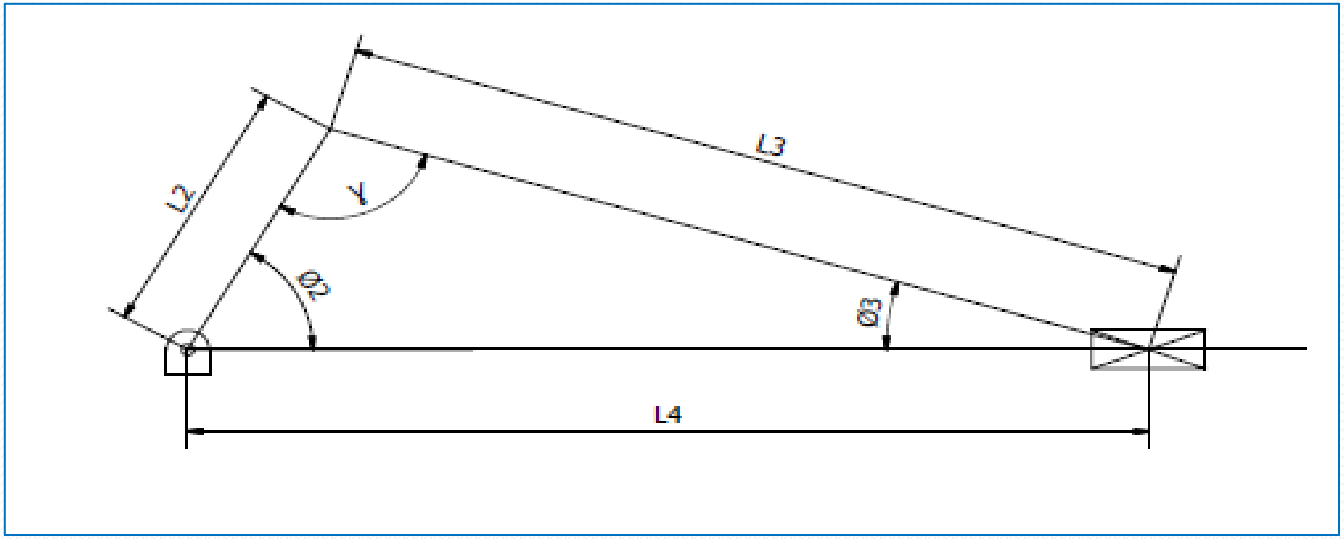


Fig. 13

DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

Método analítico de Análisis de aceleración (BMC)

Con mucha frecuencia se impulsa la manivela, de modo que, conociendo $\emptyset_2, W_2, \propto_2$ *y la posición y velocidad de todos los eslabones, se determinan las aceleraciones de los otros eslabones con las ecuaciones que se muestran a continuación:*

$$\propto_3 = \frac{w_2^2 L_2 \sin \emptyset_2 + w_2^2 L_3 \sin \emptyset_3 - \propto_2 L_2 \cos \emptyset_2}{L_3 \cos \emptyset_3}$$

$$\propto_4 = -\propto_2 L_2 \sin \emptyset_2 - \propto_3 L_3 \sin \emptyset_3 - w_2^2 L_2 \cos \emptyset_2 - w_3^2 L_3 \cos \emptyset_3$$

CENTROS INSTANTANEOS DE ROTACIÓN

Un centro instantáneo de velocidad es un punto, común a dos cuerpos en movimiento plano, cuyo punto tiene la misma velocidad instantánea en cada cuerpo. Los centros instantáneos, algunas veces se denominan "centros o polos".

Debido a que se requieren dos cuerpos o eslabones para crear un centro instantáneo (CI), se puede predecir fácilmente la cantidad de centros instantáneos que se esperan de un conjunto de eslabones. La fórmula de la combinación para "n" objetos tomados "r" en cada vez

$$C = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Para nuestro caso r = 2 y se reduce a:

$$C = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

CENTROS INSTANTANEOS DE ROTACIÓN

$$I_{AB} = I_{BA}$$

$$CI = \frac{n(n-1)}{2}$$

N: número de eslabones

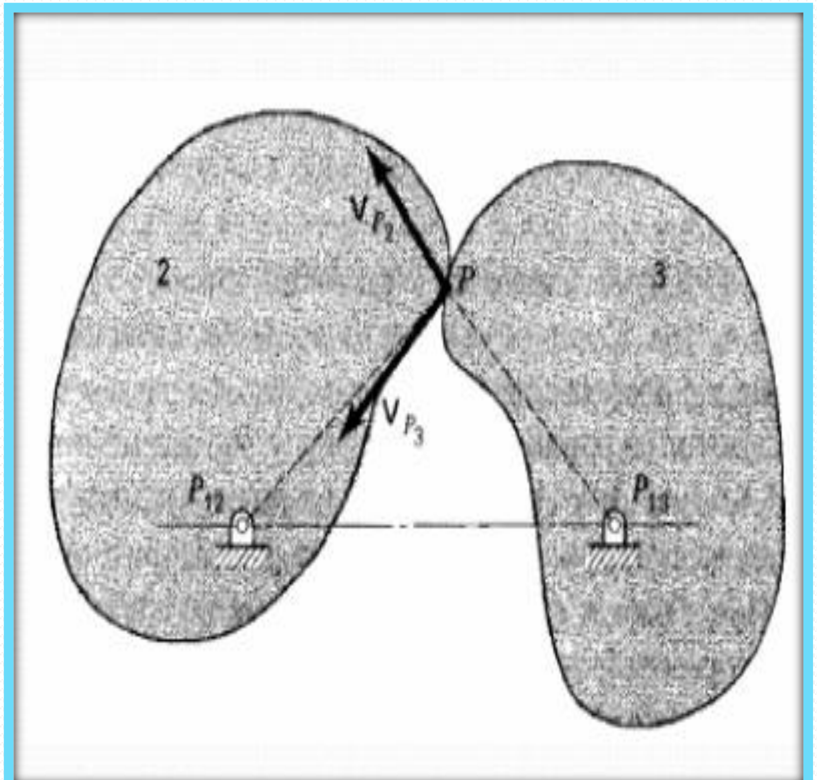
Si $n = 4$

$$CI = \frac{4(4 - 1)}{2} = 6$$

Si $n = 6$

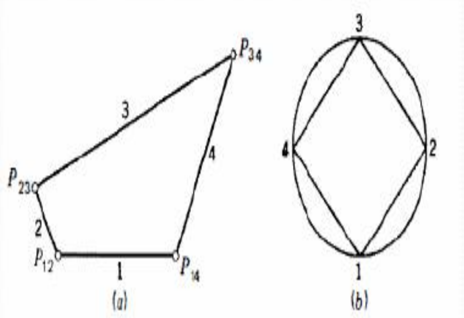
$$CI = \frac{6(6 - 1)}{2} = 15$$

TEOREMA DE KENNEDY



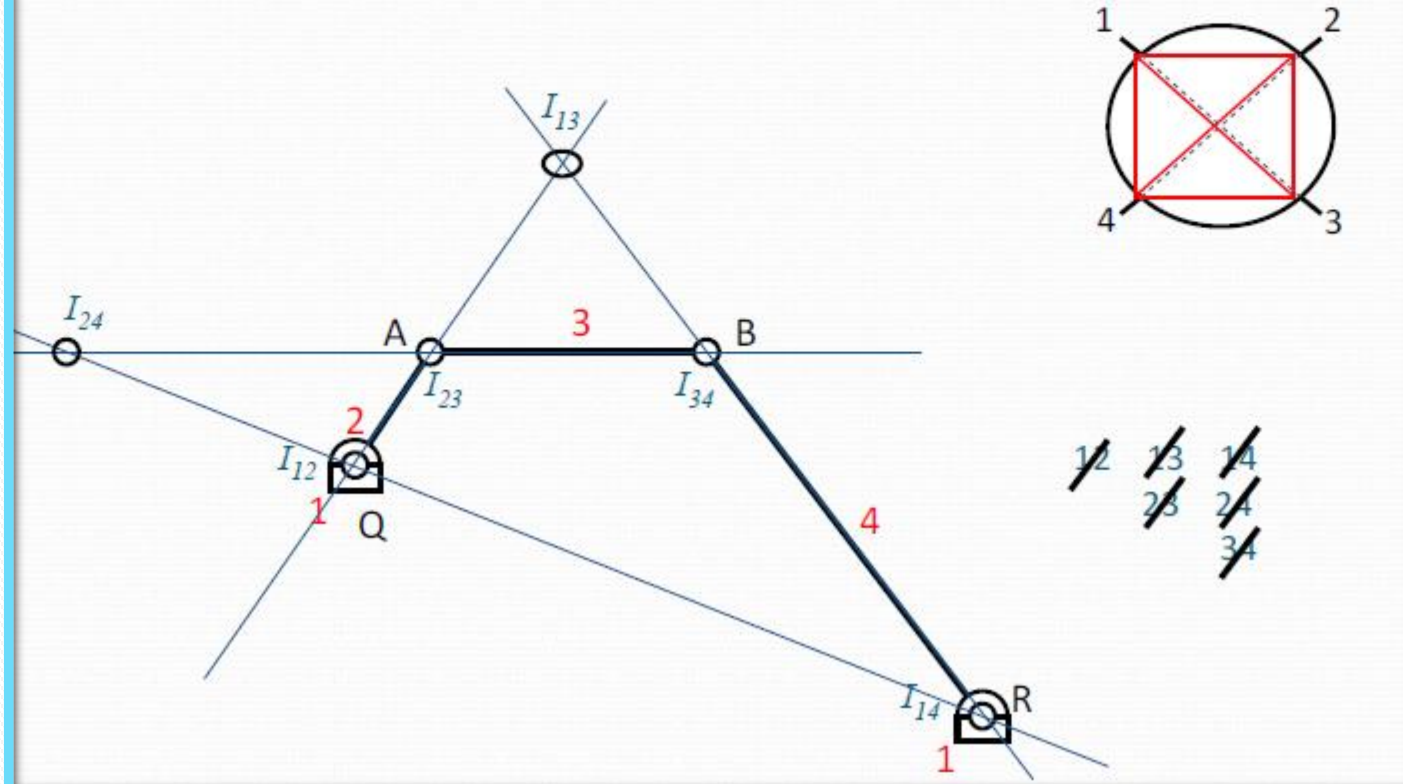
- **Teorema de tres centros o Teorema de Aronhold-Kennedy.**

  "Los tres centros instantáneos compartidos por tres cuerpos rígidos en movimiento relativo uno con respecto a los otros (ya sea que estén o no conectados) están sobre la misma recta".

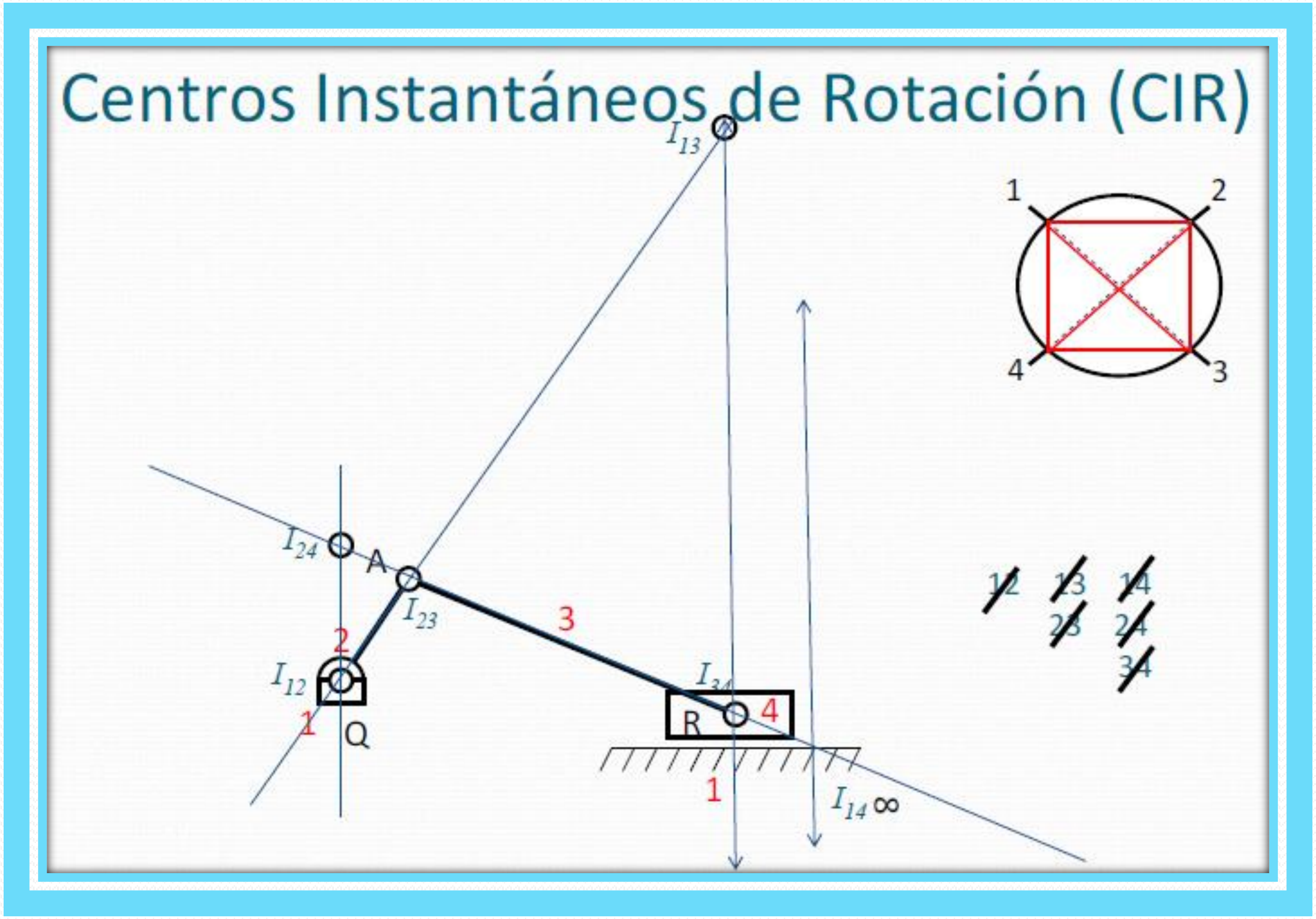


TEOREMA DE KENNEDY

Centros Instantáneos de Rotación (CIR)

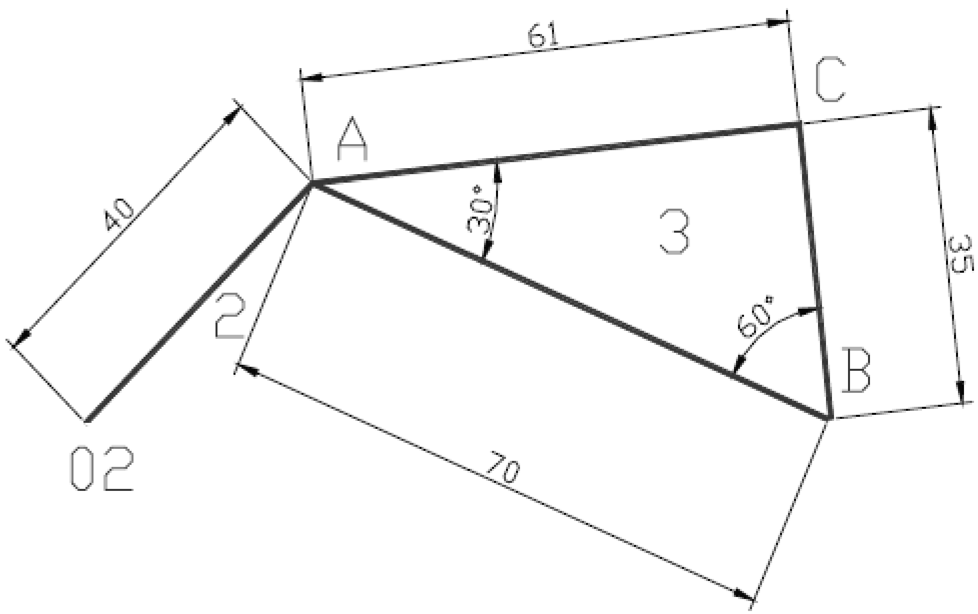


TEOREMA DE KENNEDY



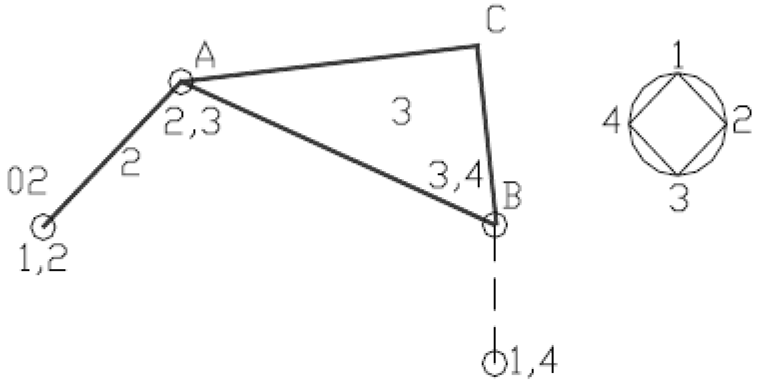
EJEMPLO DE CIR

Ejemplo 4. Dado el siguiente mecanismo, encuentre la velocidad en B y C. Considere ω_2 = 1 rad/s en contra de las manecillas del reloj.



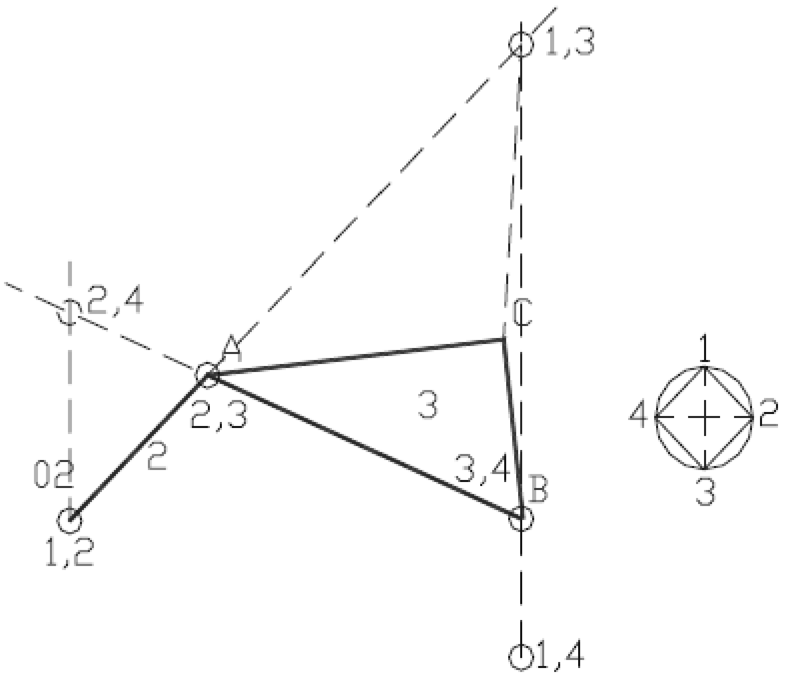
EJEMPLO DE CIR

Primero encontramos los centros instantáneos permanentes.
O12, O23, O34, O14



EJEMPLO DE CIR

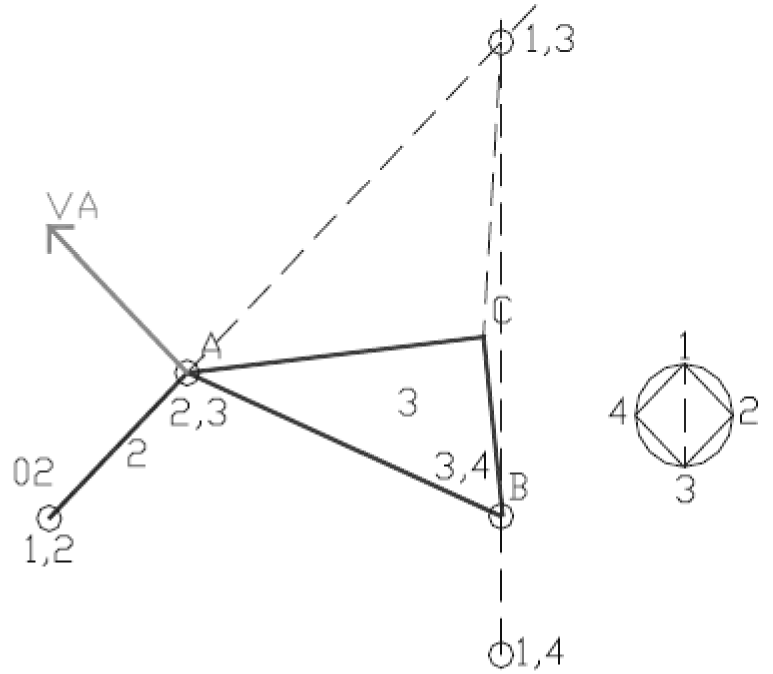
Luego encontramos los centros instantáneos que faltan
O13 y O24



EJEMPLO DE CIR

Ahora obtenemos VA de acuerdo con:

$V_A = \omega_2 \times \mathbf{r}_{02\text{-}A}$



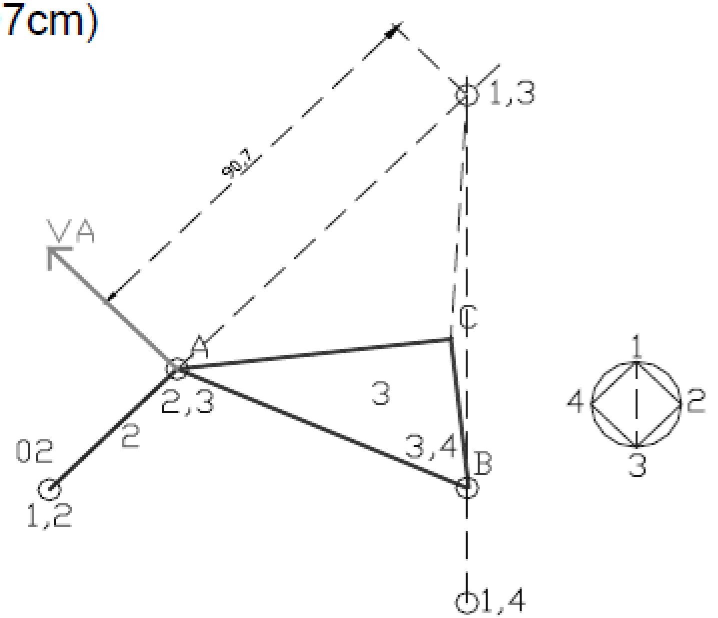
EJEMPLO DE CIR

Luego encontramos de la siguiente manera ω_3 :

$\omega_3 = V_A / \mathbf{r}_{A\text{-}I1,3}$

$\omega_3 = (4\ \text{cm/s})/(9.07\text{cm})$

$\omega_3 = 0.441\ \text{rad/s}$



Como es conocido el radio de O_{13} a B ahora se calcula $V_{34}=V_B$

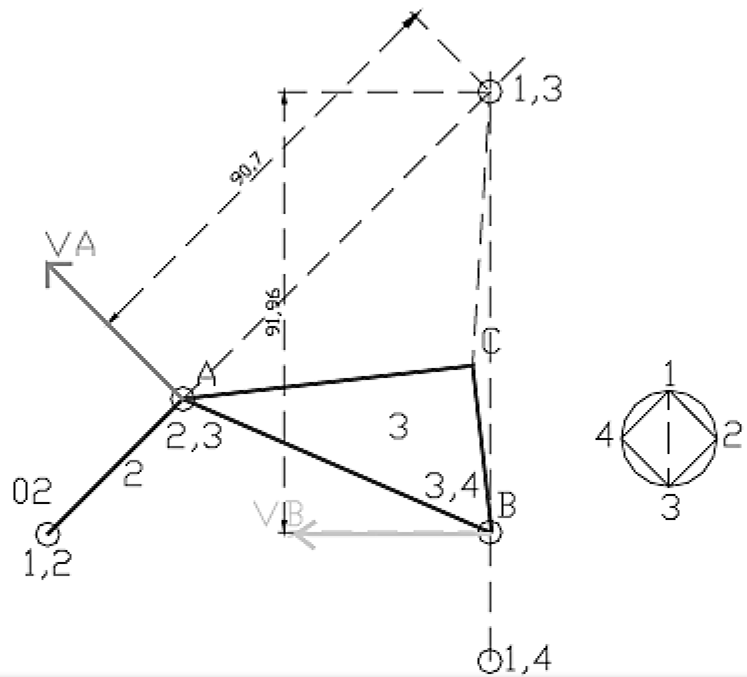
EJEMPLO DE CIR

Una vez conocida ω_3 se encuentra V_B como a continuación se describe:

$V_B = \omega_3 \times r_{A\text{-}I1,3}$

$V_B = (0.441\ rad/s)x(9.19\ cm)$

$V_B = 4.05\ cm/s$



EJEMPLO DE CIR

Y Finalmente podemos determinar o cualquier punto en el acoplador como sigue:

$V_C = \omega_3 \times r_{C\text{-}I1,3}$

$V_C = (0.441\ \text{rad/s})\text{x}(5.72\ \text{cm})$

$V_C = 2.52\ \text{cm/s}$